

INSTITUT INTERNATIONAL TECHNOLOGIE

COURS Analyse Numérique

Enseignant :

KHALIL AYADI

Sommaire

Résolution numériques des équations non linéaire : $f(x) = 0$

1.1 Introduction

Toute valeur de c qui satisfait $f(x) = 0$ est appelé zéros de f . En général, il n'existe pas des formules donnant les valeurs exactes de ce zéros, ou bien ces formules sont trop compliquées.

On a alors recours à des méthodes numériques d'approximation des solutions. Les méthodes numériques pour approcher une solution α de f (i.e $f(\alpha) = 0$) sont en générale itératives, elles consistent à construire une suite x_n telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \alpha.$$

La convergence des méthode itératives dépend en générale du choix de la donnée initiale x_0 .

1.2 Construction de solution approché

Définition 1.2.1 On appelle méthode itératives un procédé de calcul de la forme :

$$x_{n+1} = F(x_n), n = 0, 1, 2, \dots$$

qui peut d'une valeur donnée x_0 pour calculer x_1 , puis à l'aide de x_1 on calcule x_2 , etc...La formule qui donne x_{n+1} est dite formule de récurrence.

Le procédé est dit convergent si x_n tend vers un nombre finie quand $n \rightarrow +\infty$.

Définition 1.2.2 Soit p un entier positif. On dit qu'une méthode convergente est d'ordre p s'il existe une constante c tel que si $\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ alors

$$|\alpha - x_{n+1}| \leq c|\alpha - x_n|^p$$

ou encore

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|\alpha - x_{n+1}|}{|\alpha - x_n|^p} = c.$$

Si $p = 1$ on parle de convergence linéaire, si $p = 2$ de convergence quadratique.

Notons que dans le cas où $p = 1$, il est nécessaire que $c < 1$ pour que la suite (x_n) converge vers α .

1.3 Méthode de dichotomie (ou bisection)

Cette méthode dérive du théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 1.3.1 *Soit f une fonction définie et continue sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Si $f(a)f(b) < 0$ alors il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = 0$.*

Remarque 1.3.1 *Si de plus f est strictement monotone alors α est unique.*

Exemple 1.3.2 1) *Tout polynôme de de degré impaire admet au moins un zéros dans $\mathbb{R}$.*

2) $f(x) = 2x - 1 - 2 \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$ admet un zéro dans $[0, 1]$.

Algorithme de Méthode

1er étape :

On pose $\begin{cases} a_0 = a \\ b_0 = b \\ X_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} \end{cases}$ On a nécessairement l'une des condition suivante :

- Si $f(X_0) = 0$ alors $\alpha = X_0$.
- Si $f(a_0) \cdot f(X_0) < 0$ on posera $[a_1, b_1] = [a_0, X_0]$.
- Si $f(b_0) \cdot f(X_0) < 0$ on posera $[a_1, b_1] = [X_0, b_0]$.

2ieme étape :

On recommence l'étape 1 pour l'intervalle $[a_1, b_1]$ On pose $X_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$.

On a nécessairement l'une des condition suivante :

- Si $f(X_1) = 0$ alors $\alpha = X_1$.
- Si $f(a_1) \cdot f(X_1) < 0$ on posera $[a_2, b_2] = [a_1, X_1]$.
- Si $f(b_1) \cdot f(X_1) < 0$ on posera $[a_2, b_2] = [X_1, b_1]$.

kieme étape : Le même principe.

On pose $X_k = \frac{a_k + b_k}{2}$.

On a nécessairement l'une des condition suivante :

- Si $f(X_k) = 0$ alors $\alpha = X_k$.
- Si $f(a_k) \cdot f(X_k) < 0$ on posera $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, X_k]$.
- Si $f(b_k) \cdot f(X_k) < 0$ on posera $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [X_k, b_k]$.

les itérations s'achèvent à la m-ieme étape quand $|X_m - \alpha| < |X_m - X_{m-1}| < \epsilon$
où ϵ est une tolérance fixé.

Remarque 1.3.2 *La méthode de dichotomie est toujours convergente.*

Théorème 1.3.3 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite générée par l'algorithme d'approximation par dichotomie. Soit α la solution de $f(x) = 0$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = \alpha$ avec

$$|X_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^n} \quad \forall n \geq 1$$

Noter bien que pour avoir $|X_n - \alpha| \leq \epsilon$ il suffit d'avoir $\frac{b-a}{2^n} \leq \epsilon$ don il suffit de prendre n qui vifie

$$n \geq \frac{\ln(\frac{b-a}{\epsilon})}{\ln(2)}$$

d'où le nombre d'itrations à faire pour avoir une erreur inférieure à ϵ est $n = E(\frac{\ln(\frac{b-a}{\epsilon})}{\ln(2)}) + 1$.

Exemple 1.3.4 Soit $f(x) = x^2 \ln x - x - 1$. On a $f(1) = -2 < 0$ et $f(3) = 9 \ln 3 - 4 > 0$ alors il existe $\alpha \in [1, 3]$ tel que $f(\alpha) = 0$. Soit n le nombre d'itération pour avoir α à 10^{-5} près alors :

$$n = E(\frac{5 \ln 10}{2}) + 1 = 17.$$

Avantage de dichotomie

* La méthode exige peu de conditions sur f , la seule demandée est la continuité de f .

* Toujours convergente.

Inconvénients de dichotomie

* Cette méthode est très lente, il faut beaucoup d'itérations pour avoir une valeur approchée acceptable.

Exercice 1.3.5

1. On définit le polynome $P(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$. Localiser ses racines dans des intervalles de $\mathbb{R}$ deux à deux disjoints.
2. Donner une approximation par la méthode de dichotomie à 10^{-2} près de la racine de plus petite module.

Solution.

1. Nous avons $P'(x) = 3x^2 + 6x - 9$ qui admet deux racines x_1 et x_2 . Le tableau de variation de P est

Les racines α_1, α_2 et α_3 sont tels que $\alpha_1 \in [-5, -3]$, $\alpha_2 \in [0, 1]$ et $\alpha_1 \in [\frac{3}{2}, 2]$.
 2. $\alpha = \alpha_2$ est la racine de plus petit module car $|\alpha_2| < |\alpha_1|$ et $|\alpha_2| < |\alpha_3|$.
 Le nombre d'itérations nécessaire pour avoir une approximation de α à l'ordre 10^{-2} par la méthode de dichotomie sur $[0, 1]$ est $n \geq \frac{2 \ln(10)}{\ln(2)} = 6,643856$ donc

$n = 7$. On a

$$X_0 = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}, P(X_0) = -\frac{21}{8} \text{ et } P(X_0).P(0) < 0 \text{ donc } \alpha \in [0, \frac{1}{2}].$$

$$X_1 = \frac{\frac{1}{2}+0}{2} = \frac{1}{4}, P(X_1) = -\frac{67}{64} \text{ et } P(X_1).P(0) < 0 \text{ donc } \alpha \in [0, \frac{1}{4}].$$

$$X_2 = \frac{0+\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{8}, P(X_2) = -\frac{39}{512} \text{ et } P(X_2).P(0) < 0 \text{ donc } \alpha \in [0, \frac{1}{8}].$$

$$X_3 = \frac{\frac{1}{8}+0}{2} = \frac{1}{16}, P(X_3) = \frac{1841}{4096} \text{ et } P(X_3).P(X_2) < 0 \text{ donc } \alpha \in [\frac{1}{16}, \frac{1}{8}].$$

$$X_4 = \frac{\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}{2} = \frac{3}{32}, P(X_4) = \frac{6011}{32768} \text{ et } P(X_3).P(X_4) < 0 \text{ donc } \alpha \in [\frac{3}{32}, \frac{1}{8}].$$

$$X_5 = \frac{\frac{1}{8}+\frac{3}{32}}{2} = \frac{7}{64}, P(X_5) = \frac{13847}{262144} \text{ et } P(X_5).P(X_3) < 0 \text{ donc } \alpha \in [\frac{7}{64}, \frac{1}{8}].$$

$$X_6 = \frac{\frac{1}{8}+\frac{7}{64}}{2} = \frac{15}{128}, P(X_6) = \frac{-24913}{2097152} \text{ et } P(X_5).P(X_6) < 0 \text{ donc } \alpha \in [\frac{7}{64}, \frac{15}{128}].$$

$$X_7 = \frac{\frac{15}{128}+\frac{7}{64}}{2} = \frac{29}{252} = 0,1150793651$$

1.4 Méthode de point fixe

Cette méthode consiste à faire d'abord des opérations algébriques sur l'équation $f(x) = 0$ pour l'écrire sous la forme $g(x) = x$.

Définition 1.4.1 Soit $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que g est lipschitzienne de rapport k sur $[a, b]$ si

$$|g(x) - g(y)| \leq k|x - y| \quad \forall x, y \in [a, b]$$

Si de plus $k < 1$, on dit que g est contractante.

Exemple 1.4.2 La fonction $f(x) = \frac{\cos x}{3}$ est contractante sur tout intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. En effet, f est continue dérivable sur $[a, b]$ et en appliquant le théorème d'accroissement fini, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(a) - f(b) = f'(c)(b - a)$. Ce qui donne que $\frac{\cos a}{3} - \frac{\cos b}{3} = -\frac{\sin c}{3}(b - a)$. Puisque $|\frac{\sin c}{3}| < \frac{1}{3}$ alors

$$|\frac{\cos a}{3} - \frac{\cos b}{3}| = |-\frac{\sin c}{3}| |b - a| < \frac{1}{3} |a - b|$$

d'où f est contractante.

Proposition 1.4.3 Soit $g \in C^1([a, b])$. Si $\sup_{x \in [a, b]} |g'(x)| < 1$ alors g est contractante sur $[a, b]$.

Preuve. Soit $x, y \in [a, b]$. En appliquant le théorème d'accroissement fini, il existe $c \in]x, y[$ tel que $g(x) - g(y) = g'(c)(x - y)$. Donc $|g(x) - g(y)| \leq k|x - y|$ avec $k = \sup_{x \in [a, b]} |g'(x)|$. Puisque par hypothèse $k < 1$ alors g est contractante.

Algorithme de Méthode

$$\begin{cases} X_0 \in \mathbb{R} \\ X_{n+1} = g(X_n) \end{cases}$$

Théorème 1.4.4 Soit $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ telle que :

▷ $g([a, b]) \subset [a, b]$.

▷ g est contractante sur $[a, b]$ de rapport $k \in]a, b[$,

alors la suite définie par $X_{n+1} = g(X_n)$ converge vers l'unique point fixe α de g . De plus

$$|X_n - \alpha| < k^n |X_0 - \alpha|.$$

Corollaire 1.4.5 Le résultat du théorème précédent reste valable si l'on remplace "g contractante" par

$$g \in C^1([a, b]) \text{ et } |g'(x)| < 1 \forall x \in [a, b].$$

Théorème 1.4.6 Soit g une fonction numérique admettant un point fixe α . Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que g soit de classe C^p au voisinage de α et que

$$\begin{cases} g^{(k)}(\alpha) = 0 \forall k < p \\ \text{et} \\ g^{(p)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

alors, si la méthode de point fixe converge, elle est d'ordre p . En particulier, si $g'(\alpha) \neq 0$, la convergence est d'ordre 1.

Corollaire 1.4.7 Soit g une application admettant un point fixe α .

* Si $|g'(\alpha)| < 1$ alors α est dit attractif.

* Si $|g'(\alpha)| > 1$ alors α est dit répulsif.

* Si $|g'(\alpha)| = 1$ alors α peut être soit attractif soit répulsif.

Exemple 1.4.8 Soit $P(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$. Appliquer la méthode du point fixe pour déterminer une approximation à 10^{-2} près de α zéros de P dans $[0, 1]$ (voir exercice précédent).

Considérons la fonction $g(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{9}$. Alors $P(x) = 0$ est équivalent

$$g(x) = x.$$

On a $g'(x) = \frac{x^2 + 2x}{3}$ et on montre que $\sup_{x \in [0,1]} |g'(x)| = 1$. Donc g ne vérifie pas

la deuxième hypothèse du théorème du point fixe. Or $P(\frac{1}{2}) < 0$ donc $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$.

De plus $g(0) = \frac{1}{9} > 0$ et $g(\frac{1}{2}) = \frac{5}{24} < \frac{1}{2}$ donc $g([0, \frac{1}{2}]) \subset [0, \frac{1}{2}]$. D'autre par on

vérifie que $\sup_{x \in [0, \frac{1}{2}]} |g'(x)| = \frac{5}{12} < 1$. Alors g vérifie les hypothèses du théorème du

point fixe et l'algorithme

$$\begin{cases} X_0 \in [0, \frac{1}{2}] \\ X_{n+1} = g(X_n) \end{cases}$$

converge vers l'unique point fixe de f sur $[0, 1]$ et on a

$$|X_n - \alpha| < \left(\frac{5}{12}\right)^n |X_0 - \alpha|.$$

$\left(\frac{5}{12}\right)^n < 10^{-2}$ implique $n \geq 6$. Soit $X_0 = 0$, alors $X_1 = g(X_0) = \frac{1}{9}$.

$$X_2 = g(X_1) = 0,115379$$

$$X_3 = g(X_2) = 0,115719$$

$$X_4 = g(X_3) = 0,1157469313$$

$$X_5 = g(X_4) = 0,1157491964$$

$$X_6 = g(X_5) = 0,1157493802.$$

1.5 Méthode de Newton

Théorème 1.5.1 Soit $f \in C^2([a, b])$ avec

$$\triangleright f(a).f(b) < 0$$

$$\triangleright \forall x \in [a, b], f'(x) \neq 0$$

$$\triangleright \forall x \in [a, b], f''(x) \neq 0,$$

alors pour les $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0)f''(x_0) > 0$, la suite définie par

$$\begin{cases} X_0 \\ X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)} \end{cases}$$

converge vers l'unique solution α de l'équation $f(x) = 0$ dans $[a, b]$.

Remarque 1.5.1 Soit $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

$f(\alpha) = 0 \iff g(\alpha) = \alpha$ donc α est un point fixe de g .

Nous avons $g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$. Donc $g'(\alpha) = 0$. On conclut que la convergence de la méthode de Newton est au moins quadratique.

Exemple 1.5.2 Soit $f(x) = x^2 - \cos x$ sur $[\frac{1}{2}, \frac{\pi}{3}]$ et soit $X_0 = \frac{\pi}{3}$.

On a $f'(x) = 2x - \sin x > 0$ sur $[\frac{1}{2}, \frac{\pi}{3}]$ et $f''(x) = 2 + \cos x > 0$. Nous avons $f(\frac{1}{2}) \cdot f(\frac{\pi}{3}) < 0$ et $f(\frac{\pi}{3})f''(\frac{\pi}{3}) > 0$. Donc f admet un zéro α dans $[\frac{1}{2}, \frac{\pi}{3}]$ et la méthode de Newton est donnée par

$$\begin{cases} X_0 = \frac{\pi}{3} \\ X_{n+1} = X_n - \frac{X_n^2 - \cos x_n}{2X_n - \sin X_n} \end{cases}$$

On trouve :

$$X_1 = X_0 - \frac{f(X_0)}{f'(X_0)} = 0,845664$$

$$X_2 = X_1 - \frac{f(X_1)}{f'(X_1)} = 0,824386$$

$$X_3 = X_2 - \frac{f(X_2)}{f'(X_2)} = 0,824133.$$

Alors X_3 est une approximation de α à 10^{-3} près.